Logică matematică și Teoria mulțimilor

Fie N cel mai mic număr natural ce nu poate fi definit prin mai puțin de șaptesprezece cuvinte.

n = Cel mai mic număr natural frumos.

Limbaj formal (Teoria simplificată a predicatelor aplicată în teoria mulțimilor)

Sintaxa

Simboluri (litere, variabile): A, B, a, b, ... → denumesc mulțimi

Constante (mulțimi fixate)

Simboluri de relaționare: $=$ $\in$

$a \in A$, $A \in B$, $a \in b$, $b \in a$

Conectori logici: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

Cuantificatori $(\forall)$, $(\exists)$

$(\forall x)(\ldots)$

Paranteze $($, $)$

Exemple de formule:

1) $\neg(a \in B \wedge B \in C) \Rightarrow ((B \in a) \vee (a \in C))$

2) $\neg \in a \wedge B \in C a B (\forall a)$

Cum avem voie să formăm formule

O formulă poate să fie $s_1 \in s_2$ sau $s_1 = s_2$

cu s_1, s_2 litere sau constante

Și, fiind date P și Q formule construite corect,

$\neg P$, $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$, $(P \Rightarrow Q)$, $(P \Leftrightarrow Q)$,

$(\forall s_1)(P)$, $(\exists s_1)(P)$ (s_1 literă)

sunt formule legitime

Exemple:

3) $(\forall a)((a \in B \wedge B \in C) \Rightarrow a \in C)$

4) $(\exists x)(x \in A \Rightarrow ((\exists y)(y \in A \Rightarrow x = y)))$

<u>Definiție</u> Fie F o formulă

Spunem că variabila (litera) x este liberă în F dacă x nu apare în F în nicio expresie de tipul $(\forall x)(\ldots)$ sau $(\exists x)(\ldots)$

Dacă x nu e liberă, spunem că este legată.

Exemple:

1) $x = y \Rightarrow (\forall x)(x \in y)$ < x legată, y liberă

2) $(\forall y)(x = y)$ < x liberă, y legată

Dacă x e liberă în $\mathcal{F}$, putem scrie în loc de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}(x)$

Definiție:

O formulă fără variabile libere se numește propoziție.

Pentru propoziții avem valori de adevăr.

Exemple

1) $(\forall x)(x \in x)$ -> propoziție

2) $(\forall x)(x \in A) \rightarrow$ nu e propoziție (A liberă)

$\mathcal{F}(A) : (\forall x)(x \in A)$

$\mathcal{F}(\emptyset) : (\forall x)(x \in \emptyset)$

$\exists x, y \quad x \neq y \quad x \in A, y \in$

3) $(\exists x)((\exists y)(\neg(x = y) \wedge x \in A \wedge y \in B))$

$\mathcal{G}(A, B) : (\exists x)((\exists y)(\neg(x = y) \wedge x \in A \wedge y \in B))$

$\mathcal{G}(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ adevărată, de ex $x = 2$, $y = -5$

$\mathcal{G}(\{a\}, \{a\})$ falsă

-> Traducere: există două elemente distincte, unul în A și celălalt în B.

Ce înseamnă valoare de adevăr?

$x = y$ dacă x și y sunt aceeași mulțime

$x \in y$ VA URMA

Dacă P și Q sunt propoziții și știm valoarea de adevăr pt. P și pt. Q, atunci

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$P \wedge \neg Q$
1	1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0

Dacă plouă, atunci îmi iau umbrela

P : plouă

Q : îmi iau umbrela

$$P \Rightarrow Q$$

Când mint?

Când plouă, și nu am umbrela ($P \wedge \neg Q$)

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$$

echivalență logică
(adică tabele identice)

Tautologii (expresii adevărate pentru orice valoare de adevăr a propozițiilor implicate)

Exemple:

1) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

Echivalent:

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$$

Dacă $E_1 \Leftrightarrow E_2$ e tautologie, scriem $E_1 \equiv E_2$

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P\wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
1	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1

2) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$	$(P\Rightarrow Q)\wedge(Q \Rightarrow P)$	$(P\Rightarrow Q)\wedge (Q\Rightarrow P) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$
1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0.	1
1	0	0	1	0	0	1

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \equiv P \Leftrightarrow Q$$

$$(\exists x)(F(x)) \equiv \neg(\forall x)(\neg F(x))$$

$A = \mathbb{N}$

$F(x): x = 2$

$F(x): x \geq 0$

$F(x): x = -1$

Semnificația expresiei:

$(\forall x)(x \in A \Rightarrow F(x))$

$(\exists x)(x \in A \wedge F(x))$

Riguros pentru:

$(\forall) x \in A \quad F(x)$

$(\exists) x \in A \quad F(x)$

De ce limbaj AȘA formal?

Ex Pentru orice nr. natural n mai mare ca 1 există un nr. x natural mai mare decât 1 astfel încât toți divizorii naturali nenuli ai lui x îl divid pe n

$$(\forall) n \in \mathbb{N},\ n > 1 \quad (\exists) x \in \mathbb{N},\ x > 1 \quad (\forall) d \in \mathbb{N}^* \quad d \mid x \quad d \mid n$$

a) $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \wedge n > 1 \wedge (\exists x)(x \in \mathbb{N} \Rightarrow x > 1 \wedge (\forall d)(d \in \mathbb{N}^* \wedge$
$\wedge\, d / x \Rightarrow d / n)))$

b) $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \wedge n > 1 \Rightarrow (\exists x)(x \in \mathbb{N} \wedge (x > 1) \wedge (\forall d)(d \in \mathbb{N}^* \wedge d / x \Rightarrow$
$\Rightarrow d / n)))$

c) $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \wedge n > 1 \wedge (\exists x)(x \in \mathbb{N} \wedge (x > 1) \Rightarrow (\forall d)(d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$
$\Rightarrow (d / x \Rightarrow d / n))))$

Cum negi $(\forall x)(x \in A \Rightarrow F(x))$

$(\exists x)(x \in A \wedge F(x))$?

Remember: $(\exists x)(F(x)) \equiv \neg(\forall x)(\neg F(x))$

$$\neg(\forall x)(x \in A \Rightarrow F(x)) \equiv (\exists x)(\neg(x \in A \Rightarrow F(x))) \equiv$$
$$\equiv (\exists x)(x \in A \wedge \neg F(x))$$

$$\neg(\exists x)(x \in A \wedge F(x)) \equiv (\forall x)(x \in A \Rightarrow \neg F(x))$$

Elemente de teorie axiomatică a mulțimilor

Zermelo - Fraenkel - Skolem

(ZFS)

Mulțime = grămadă de obiecte cu o anumită proprietate

$X = \{x \mid x \notin x\}$

$a \notin A : \neg(a \in A)$

$a \neq b : \neg(a = b)$

Exemple: $\{1,2\} \notin \{1,2\}$

$\{1,2\} \in \{1, 2, \{1,2\}\}$

Întrebare: $X \in X$?

Dacă $X \in X$

$X = \{x \mid x \notin x\}$ $\Rightarrow X \notin X$

Dacă $X \notin X$

$X = \{x \mid x \notin x\}$ $\Rightarrow X \in X$

Ce dăm voie să fie o mulțime?

Categorie nu X de mai sus. Dar ce???

Axiome:

I) Axioma extensiei:

Mulțimile sunt unic determinate de elementele lor

$(\forall A)((\forall B)((\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B))$

REMEMBER: Dacă $A = B$ și $x \in A$,
înlocuim A cu B în ↺ și iese:
$x \in B$

Notație: $A \subseteq B \overset{not}{:=} (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$

Teoremă

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Demonstrație: „$\Rightarrow$" Presupunem $A = B$ și x arbitrar

$p \Rightarrow p$ tautologie

Deci
$x \in A \Rightarrow x \in A$
Cum $A = B$

Rezultă
$x \in A \Rightarrow x \in B$

Deci $A \subseteq B$
La fel $B \subseteq A$

Deci $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

„$\Leftarrow$" Presupunem că $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A) \equiv (\forall x)((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$$

$$\equiv (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Din Axioma I, rezultă $A = B$

(II) Axioma părților unei mulțimi ($P(A)$)

Exemplu $A = \{1, 2, 3\}$

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$$(\forall A)\left((\exists P)\left((\forall B)((B \subseteq A) \Leftrightarrow B \in P)\right)\right)$$

III Axioma reuniunii

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{1, 3\}$

$U = A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$M = \{A, B, C\} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 3\}\}$

Axioma $(\forall M)\left((\exists U)\left((\forall x)\left(x \in U \Leftrightarrow (\exists A)(A \in M \wedge x \in A)\right)\right)\right)$

Pentru orice mulțime M, există o mulțime U formată exact din elementele elementelor lui M.

IV Schema de axiome de substituție

Def Fie $E(x, y)$ expresie cu exact două variabile libere: x, y

E se numește relație funcțională, dacă pentru orice x există cel mult un y astfel încât $E(x, y)$ e adevărată

$$(\forall x)\left((\forall y_1)\left((\forall y_2)\left(E(x, y_1) \wedge E(x, y_2) \Rightarrow y_1 = y_2\right)\right)\right)$$

By the way:

$(\exists! x)(F(x))$ există și e unic

$$(\exists! x)(F(x)) \stackrel{def.}{:=} (\exists x)\left(F(x) \wedge (\forall y)(F(y) \Rightarrow y = x)\right)$$

Exemplu

În $\mathbb{N}$

1) $E(x, y)$: $y = x + 2$

Pentru orice relație funcțională $E(x, y)$ avem axioma:

$$(\forall A)\Big((\exists B)\Big(\big((\forall x)(x \in B \Leftrightarrow (\exists c)(c \in A \wedge E(c, x))\big)\Big)\Big)\Big)$$

$$B = \{ x \mid E(c, x), c \in A \}$$

Teoremă

Existența mulțimii $B = \{\underline{x \in A \mid P(x)}\}$

Fie $P(x)$ o expresie cu o variabilă liberă x.

Atunci $(\forall A)\big((\exists B)\big((\forall x)(x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge P(x))\big)\big)$

Exemplu: $P(x)$: $x > 3$

$$B = \{ x \in A \mid x > 3 \}$$

Demonstrație: Fie $P(x)$ expr. cu o var. liberă x

Definim $E(x, y)$: $x = y \wedge P(y)$

$E(x, y_1) \wedge E(x, y_2)$ implică $x = y_1 \wedge x = y_2$ implică $y_1 = y_2$

Deci $E(x, y)$ rel. funcțională

Din Axioma $\overline{\underline{IV}}$,

$$(\forall A)\Big((\exists B)\Big((\forall x)(x \in B \Leftrightarrow \overbrace{(\exists c)(c \in A \wedge x = c \wedge P(x))}^{(x \in A \wedge P(x))}\Big)\Big)$$

$$(\forall A)\Big(\big(\exists B\big)\big((\forall x)\,(x \in B \Leftrightarrow (x \in A \wedge P(x)))\big)\Big)$$